〈総説〉

量子異常と格子正則化

渡辺　浩*

Anomalies and Lattice Regularizations

Hiroshi WATANABE

要約　フェルミオンの保存則が量子効果によって破れる現象であるアノマリーについて略述し、この問題を数学的に厳密に解析するためのディラック作用素の格子化の方法を紹介する。

1.　保存則とその破れ

時々刻々変化して止まない現象の背後に、一定不変の性質が隠れていることがある。樹木が成長するとき、作られた組織の質量は樹木が吸収・排出した物質の質量の差に等しい。すなわち、成長過程に関与する物質の総質量は成長過程を通して変化しない。またテコを用いると、小さい力で重い物体を動かすことができるが、手元においてはテコの先端を大きく動かす必要がある。すなわち、テコは単に力の大きさを変換しているのであり、エネルギーについては損も得もない。もしも何らかの方法でエネルギーを作り出すことができるなら、永久に仕事を続ける機械を作ることができるが、このような機械 – 永久機関 – は存在しない。すなわち、閉じた系のエネルギーは保存する。

電気回路において、流れ込む電流の総量と流れ出す電流の総量は等しい。もしも電流の収支が合わないなら、その差に等しい電荷が回路の中に蓄積されて行く。すなわち電荷の総量は不変であり、この意味で電流の保存則が成立する。

*　日本医科大学・数学教室　Department of Mathematics, Nippon Medical School

ここで電子やクォークのように自転している粒子（フェルミオン）が担う電流を 2 つの成分に分けることができる。すなわち、進行方向に対して右巻きに回転する粒子の担う電流 J_+ と左巻きに回転する粒子の担う電流 J_- に分けてみる。当然、右巻き電流 J_+ と左巻き電流 J_- の和は通常の電流であり、電流保存則に従う。そこで両者の差

$$J_{\text{chiral}} = J_+ - J_- \tag{1.1}$$

を考える。これをカイラルカレント（chiral current）という。カイラルというのは「手」を意味する言葉である。問題はカイラルカレントが保存するかどうか、言い換えれば、右巻き電流と左巻き電流がそれぞれ保存するかどうかである。この問題を理論的に調べるために、電磁場と相互作用するフェルミオンの運動を量子力学的に考察すると、質量のないフェルミオンの場合カイラルカレントは保存するという結論が得られる。

ところで量子論とは、波動性と粒子性を併せ持つ物理的対象の振る舞いに関する理論である。とくに量子力学はそのような物理的対象の運動を記述する力学、すなわち粒子の生成消滅を伴わない過程を記述する理論である。これに対し、粒子の生成消滅を伴う過程、すなわち粒子の種類や数が変化する現象は場の量子論の対象となる。そこで、電磁場と相互作用するフェルミオンに場の量子論を適用してカイラルカレントの保存性を調べると、量子力学が与える保存則に微妙な破れがあることがわかる。実際、もしもカイラルカレントが保存するとすると、2 つのクォークが結合した中性パイ中間子が 2 つの光子に崩壊する過程は起こりえないことになり、実験事実と矛盾する。一般に、量子力学的保存則が場の量子論における量子効果のために破れる現象を量子異常（anomaly）といい、カイラルカレントの量子異常をカイラルアノマリー（chiral anomaly）という。

場の量子論に基づくカイラルアノマリーの計算にはデリケートな側面がある。というのは、あくまで形式的に素朴な計算を行うとカイラルカレントは保存することになるのだが、少し注意を払うと保存則に微妙な破れがあることが分かるのである。この計算の結果は実験結果と整合的であり結論は正しいとされているが，計算のプロセスは厳密性を欠いており、数学的には十分な信を置くことができない。そもそも場の量子論においてはいまだ数学的な厳密性が十分追求されておらず、形式的な数式の運用によって何らかの結果を得るという段階のものが多い。このような意味で、場の量子論のモデルを数学的に厳密に考察することは数

理物理学の重要な課題の一つであるといえる。

場の量子論の数学的困難は、体積有限の空間（時空）が無限に多くの点を含み，その各点に量子的ゆらぎをもつ物理的自由度が付随していることに起因している。場の量子論における無限自由度のゆらぎに伴う数学的困難を解決し、モデルを数学的に厳密に扱う方策として、空間や時間を格子点の集まりで置き換える格子正則化の方法がある。この小論では、格子正則化によるカイラルアノマリーの理論的解析について、その概略を紹介したい。

以下において、まず電磁場と相互作用するフェルミオンを考え、量子力学的にはカイラルカレントが保存すること（2 節）、しかし場の量子論においては保存則が破れる可能性があること（3 節）を形式的な計算によって示す。そしてカイラルカレントの保存則の破れは、ディラック作用素の数学的性質に関係していることを見る（4 節）。次に、場の量子論を厳密に基礎づけるための格子正則化のアイディアを述べる（5 節）。ここでフェルミオンのカイラルな性質を記述する格子理論のパラドキシカルな様相が明らかになる。そこで格子理論のパラドックスを解消するための方策としてウィルソンの格子正則化を導入し、ディラック作用素の「指数定理」に関する興味深い解釈に触れる（6 節）。ウィルソンの格子正則化に基づいてカイラルアノマリーを厳密に論ずる仕事は、文献[4]やその引用文献においてほぼ完成しているのだが、ここではこの問題に深入りせずにその後の動向に眼を向けたい。すなわち、素粒子論のいわゆる「標準模型」を格子正則化する試みの中で、Ginsparg-Wilson 関係式を満たす格子正則化が論じられるようになったが、この方向の厳密な解析は手つかずの状態にあり、数理物理学の興味深い問題が未解決のまま残されていると言える。そこで、Ginsparg-Wilson 関係式に基づく格子正則化のアイディアを述べ、この関係式を満たす格子作用素の例として、Neuberger の作用素を紹介する（7 節）。さらに、Ginsparg-Wilson 関係式を満たす一般の格子作用素について、そのスペクトラム（8 節）とアノマリー（9 節）について概略を記す。

2. Fermion と保存則

d 次元ユークリッド時空において、電磁場と相互作用する fermion の作用は次式で与えられる。

$$\mathcal{A} = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\psi}(x)(\not{D}_A + m)\psi(x)dx \tag{2.1}$$

ただし、d は偶数とし、m は fermion の質量、fermion の場 $\psi(x), \bar{\psi}(x)$ は $2^{d/2}$ 個の複素数を成分としてもつ[1]。即ち

$$\psi(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{2^{d/2}} \tag{2.2}$$

$$\bar{\psi}(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{2^{d/2}} \tag{2.3}$$

また $\not{D}_A$ は Dirac 作用素で

$$\not{D}_A = \sum_{\mu=1}^{d} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - iA_\mu(x)\right) \tag{2.4}$$

のように表される。ここに ∂_μ は微分作用素 $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ を表し[2]、γ^μ は d 次元 Dirac 行列で、反交換関係

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\delta_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

を満たす $2^{d/2}$ 次 hermite 行列にとる。また $A_\mu(x)$ は電磁場の potential であり、電磁場は外場（与えられた実数値関数）とする[3]。

Dirac 方程式

Fermion の運動方程式である Dirac 方程式は変分原理から導かれる。すなわち、作用 $\mathcal{A}$ の $\bar{\psi}(x)$ に関する変分と、$\psi(x)$ に関する変分が 0 であるとして、次の偏微分方程式を得る。

$$\sum_{\mu=1}^{d} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - iA_\mu(x)\right) \psi(x) + m\psi(x) = 0 \tag{2.6}$$

$$\bar{\psi}(x) \sum_{\mu=1}^{d} \gamma^\mu \left(-\overleftarrow{\partial}_\mu - iA_\mu(x)\right) + m\bar{\psi}(x) = 0 \tag{2.7}$$

ここに $\overleftarrow{\partial}_\mu$ は微分作用が左側の $\bar{\psi}(x)$ にかかることを意味する。

1　$\psi(x)$ の成分は縦に並べ、$\bar{\psi}(x)$ の成分は横に並べる。これを縦 vector、横 vector と言いたくなるが、Lorentz 変換性から vector ではなく spinor と呼ばれている。

2　座標 x^μ の添え字 μ は上付きで書くことにする。

3　記号を簡単にするために電磁場に限定するが、非可換の場合も含めて一般の gauge 場としても、以下の記述において本質的な相違は生じない。

しかし Dirac 作用素 $\not{D}_A$ は反対称性

$$\not{D}_A^* = -\not{D}_A \tag{2.8}$$

の作用素であるから、固有値（spectrum）[4]は純虚数（または 0）である。したがって質量 m が 0 でない実数なら、上記の方程式 (2.6), (2.7) は $\psi(x) = 0, \bar{\psi}(x) = 0$ 以外の解をもたない。これは時空がユークリッド計量をもつとしたため、力学的性質を失っているからである。この fermion をミンコフスキー計量をもつ時空に移設するには、座標 x^d を解析接続して $x^d = it$ により時間変数 t を導入する。さらに $A_d(x) = -iV(x), \gamma^d = i\gamma^0$ によりミンコフスキー化したポテンシャル $V(x)$ と Dirac 行列 γ^0 を導入すると、(2.6), (2.7) は

$$\gamma^0 \left(\partial_t - iV(x)\right)\psi(x) + \sum_{k=1}^{d-1} \gamma^k \left(\partial_k - iA_k(x)\right)\psi(x) + m\psi(x) = 0 \tag{2.9}$$

$$\bar{\psi}(x)\gamma^0 \left(-\overleftarrow{\partial}_t - iV(x)\right) + \bar{\psi}(x)\sum_{k=1}^{d} \gamma^k \left(-\overleftarrow{\partial}_k - iA_k(x)\right) + m\bar{\psi}(x) = 0 \tag{2.10}$$

となる。これがいわゆる Dirac 方程式である。ここで (2.9) の解 $\psi(x)$ の hermite 共役を $\psi^*(x)$ として[5]

$$\bar{\psi}(x) = \psi^*(x)\gamma^0 \tag{2.11}$$

と置くと、(2.10) の解となる。量子力学の教科書では、$\bar{\psi}(x)$ と $\psi(x)$ を独立な自由度と考えずに、始めから関係式 (2.11) が成り立つとすることが多い。

保存則

この fermion の力学は保存則をもつ。記号の煩雑さを避けるために、ミンコフスキー化したつもりになってユークリッド的記法を用いることにする。(2.6), (2.7) の解 $\psi(x), \bar{\psi}(x)$ に対し、

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{2.12}$$

4　関数解析における厳密な定義に従うと、「固有値」より spectrum という方がよい。また「固有関数」という用語も数学的には適切でない場合がある。

5　$\psi^*(x)$ は $\psi(x)$ の各成分を複素共役にして transpose したもの。

と置くと、

$$\sum_{\mu=1}^{d} \partial_\mu J^\mu(x) = 0 \tag{2.13}$$

が成り立つ。$J^\mu(x)$ は fermion の電流密度を表し、上の等式は電流保存則と解釈される。

また

$$\gamma_{d+1} = i^{d/2}\gamma^1\gamma^2\cdots\gamma^d \tag{2.14}$$

とおくと

$$\gamma^*_{d+1} = \gamma_{d+1} \tag{2.15}$$

$$\gamma^\mu\gamma_{d+1} + \gamma_{d+1}\gamma^\mu = 0 \tag{2.16}$$

$$(\gamma_{d+1})^2 = 1 \tag{2.17}$$

$$\mathrm{tr}\,(\gamma_{d+1}) = 0 \tag{2.18}$$

が成り立つ。γ_{d+1} を chirality という。そこで

$$J^\mu_{d+1}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_{d+1}\gamma^\mu\psi(x) \tag{2.19}$$

と置くと、

$$\sum_{\mu=1}^{d} \partial_\mu J^\mu_{d+1}(x) + 2m\bar{\psi}(x)\gamma_{d+1}\psi(x) = 0 \tag{2.20}$$

が成り立つ。$m = 0$ のときこの等式は保存則を表すが、保存 current (2.19) を chiral current と呼ぶ。

3. 量子異常

前節の fermion の場を（第 2）量子化する[6]。Fermion の場の量子論における物理量 $F(\bar{\psi},\psi)$ の真空期待値は、作用 (2.1) を用いた汎関数積分

$$\langle F(\bar{\psi},\psi)\rangle = \frac{1}{Z}\int F(\bar{\psi},\psi)\exp(\mathcal{A})d\bar{\psi}d\psi \tag{3.1}$$

6　量子化としては、$\psi(x), \bar{\psi}(x)$ を作用素と見なす正準量子化の方法と、汎関数積分による経路積分量子化の方法がある、ここでは後者の定式化を用いる。

で定義される。ただし $\bar{\psi}(x), \psi(x)$ は反可換な数（Grassmann 変数）を成分とする spinor であり、積分は Grassmann 積分とする。また、

$$d\bar{\psi}d\psi = \prod_{x\in\mathbb{R}^d} d\bar{\psi}(x) \prod_{x\in\mathbb{R}^d} d\psi(x) \tag{3.2}$$

$$Z = \int \exp(\mathcal{A}) d\bar{\psi}d\psi = \mathrm{Det}(\not{D}_A + m) \tag{3.3}$$

である。このように積分は無限次元であり、Det は作用素（無限次元行列）の行列式である。Grassmann 積分の性質により、Gauss 積分 (3.3) は行列式の逆数ではなく、行列式そのものになる。これらの無限次元積分の概念は数学的に正しく定義されなければならないが、しばらくの間形式的な表式としておく[7]。

Chiral 変換

上記の場の量子論において、もしも

$$\langle \sum_{\mu=1}^{d} \partial_\mu J^\mu_{d+1}(x) \rangle + 2m \langle \bar{\psi}(x) \gamma_{d+1} \psi(x) \rangle = 0 \tag{3.4}$$

が成立するならば、chiral current は $m = 0$ の場の量子論においても保存していると考えられる。この等式は、chiral 変換と呼ばれる変数変換

$$\psi(x) = \exp(i\theta\gamma_{d+1})\psi'(x) \tag{3.5}$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}'(x) \exp(i\theta\gamma_{d+1}) \tag{3.6}$$

を用いて、以下のように導出することができる[1)]。ただし $\theta = \theta(x)$ は x の関数である。

Dirac 作用素は

$$\gamma_{d+1}\not{D}_A + \not{D}_A\gamma_{d+1} = 0 \tag{3.7}$$

のように γ_{d+1} と反交換するので、θ が x によらない定数ならば、(3.5), (3.6) により、作用 (2.1) は

$$\mathcal{A}(\bar{\psi}, \psi) = \mathcal{A}(\bar{\psi}', \psi') + m \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\psi}'(x)(e^{2i\theta\gamma_{d+1}} - 1)\psi'(x) dx \tag{3.8}$$

---

7 Chiral current の保存を論ずるなら、始めから $m = 0$ にしておけばよさそうなものだが、$Z \neq 0$ を保証するために、まず $m \neq 0$ として fermion の理論を定式化し、最後に $m \to 0$ の極限をとることにする。

のように変換する。したがって、massless limit（$m \to 0$）において、作用 $\mathcal{A}$ は chiral 不変であることが分かる。(3.7) は massless Dirac 作用素が chiral 不変性をもつことを意味している。

θ が x に依存するときは θ に微分がかかる。そこで θ が微小であるとして 1 次の項までとると

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\bar{\psi},\psi) &= \mathcal{A}(\bar{\psi}',\psi') - i\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_\mu\theta)J'^{\mu}_{d+1}dx + 2im\int_{\mathbb{R}^d}\theta\bar{\psi}'(x)\gamma_{d+1}\psi'(x)dx \\ &= \mathcal{A}(\bar{\psi}',\psi') + i\int_{\mathbb{R}^d}\theta\partial_\mu J'^{\mu}_{d+1}dx + 2im\int_{\mathbb{R}^d}\theta\bar{\psi}'(x)\gamma_{d+1}\psi'(x)dx\end{aligned} \tag{3.9}$$

となる。ただし J'^{μ}_{d+1} は $\bar{\psi}',\psi'$ に対する chiral current であり、1 行目から 2 行目にかけて部分積分を用いた。上式を次のように書く。

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \delta\mathcal{A}' \tag{3.10}$$

ただし

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}(\bar{\psi}',\psi') \tag{3.11}$$

$$\delta\mathcal{A}' = i\int_{\mathbb{R}^d}\theta\partial_\mu J'^{\mu}_{d+1}dx + 2im\int_{\mathbb{R}^d}\theta\bar{\psi}'(x)\gamma_{d+1}\psi'(x)dx \tag{3.12}$$

これを用いて、積分 (3.3) についての自明な等式

$$\int \exp(\mathcal{A})d\bar{\psi}d\psi = \int \exp(\mathcal{A}')d\bar{\psi}'d\psi' \tag{3.13}$$

を変形する。左辺は

$$\int \exp(\mathcal{A})d\bar{\psi}d\psi = \int \exp(\mathcal{A}')(1+\delta\mathcal{A}')d\bar{\psi}d\psi \tag{3.14}$$

右辺は

$$\begin{aligned}\int \exp(\mathcal{A}')d\bar{\psi}'d\psi' &= \int \exp(\mathcal{A}')\frac{\partial(\bar{\psi},\psi)}{\partial(\bar{\psi}',\psi')}d\bar{\psi}d\psi \\ &= \int \exp(\mathcal{A}')(1+2i\mathrm{Tr}\,(\theta\gamma_{d+1}))d\bar{\psi}d\psi\end{aligned} \tag{3.15}$$

となるので（Grassmann 積分の Jacobian は通常のものの逆数になる）[8]、

$$\int \exp(\mathcal{A}')\delta\mathcal{A}' d\bar{\psi} d\psi = 2i\mathrm{Tr}\,(\theta\gamma_{d+1}) \int \exp(\mathcal{A}') d\bar{\psi} d\psi \tag{3.16}$$

(3.5), (3.6) により (3.16) の両辺中の $\bar{\psi}', \psi'$ を $\bar{\psi}, \psi$ で表し、θ の高次項を落とすと

$$\int \exp(\mathcal{A})\delta\mathcal{A} d\bar{\psi} d\psi = 2i\mathrm{Tr}\,(\theta\gamma_{d+1}) \int \exp(\mathcal{A}) d\bar{\psi} d\psi \tag{3.17}$$

よって

$$\langle \delta\mathcal{A} \rangle = 2i\mathrm{Tr}\,(\theta\gamma_{d+1}) \tag{3.18}$$

を得る。ただし

$$\delta\mathcal{A} = i\int_{\mathbb{R}^d} \theta\partial_\mu J^\mu_{d+1} dx + 2im\int_{\mathbb{R}^d} \theta\bar{\psi}(x)\gamma_{d+1}\psi(x)dx \tag{3.19}$$

ここで (2.18) を考慮して、（scalar）関数 θ に対し

$$\mathrm{Tr}\,(\theta\gamma_{d+1}) = 0 \tag{3.20}$$

となると見れば、

$$\langle \delta\mathcal{A} \rangle = 0 \tag{3.21}$$

すなわち

$$\int_{\mathbb{R}^d} \theta\langle \partial_\mu J^\mu_{d+1} \rangle dx + 2m\int_{\mathbb{R}^d} \theta\langle \bar{\psi}(x)\gamma_{d+1}\psi(x) \rangle dx = 0 \tag{3.22}$$

$\theta = \theta(x)$ は任意にとれるから、(3.4) が得られる。

保存則の破れ

　このように $m = 0$ の場の量子論においても chiral current は保存するように見えるのだが、実は chiral current の保存則は素粒子の実験事実に反するので

8　tr は $2^{d/2}$ 次正方行列としての trace を表し、Tr は関数にかかる作用素（無限次元行列）の trace を表す。

ある[2)]。上記の計算はすべて形式的であるから問題はどこにもあり得るのだが、(3.20) は無限次元の trace であり取り分け注意を要する。特に $\theta(x)=1$ とすると (3.20) は $\mathrm{Tr}\,\gamma_{d+1}=0$ となるが、有限行列としての γ_{d+1} の trace が 0 になるからと言って、無限次元の作用素として trace が 0 であるとは言えない。なぜなら無限次元の作用素としての γ_{d+1} の固有値 ± 1 は無限重に縮退しており、これらの固有値の和は絶対収束しないので和をとる順序に依存するからである。

そこで Dirac 作用素 $\not{D}_A$ を対角化する基底（spectral measure）を用いて $\mathrm{Tr}\,\gamma_{d+1}$ を計算してみる。$\not{D}_A$ の固有値（spectrum）を λ として

$$\not{D}_A u = \lambda u \tag{3.23}$$

が成立するとする。(3.7) より

$$\not{D}_A \gamma_{d+1} u = -\lambda \gamma_{d+1} u \tag{3.24}$$

であるから、$\lambda \neq 0$ ならば u と $\gamma_{d+1}u$ は $\not{D}_A$ の異なる固有値（spectrum）に属するので直交する。よって

$$u_{\pm} = u \pm \gamma_{d+1} u \tag{3.25}$$

と置くと、u_+ と u_- は直交し、

$$\gamma_{d+1} u_{\pm} = \pm u_{\pm} \tag{3.26}$$

したがって $u_{\pm}$ をペアにして γ_{d+1} の固有値の和をとると 0 になる。他方 $\lambda = 0$ ならば、u と $\gamma_{d+1}u$ はどちらも $\mathrm{Ker}\not{D}_A$（$\not{D}_A$ の kernel）に属する。すなわち、γ_{d+1} は $\mathrm{Ker}\not{D}_A$ に作用している。そこで γ_{d+1} の作用を $\mathrm{Ker}\not{D}_A$ 上に限定して固有値の和をとる。

$$\mathrm{Ker}_{\pm} = \{u \in \mathrm{Ker}\not{D}_A \mid \gamma_{d+1} u = \pm u\} \tag{3.27}$$

と置くと、

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_{d+1} = \dim \mathrm{Ker}_+ - \dim \mathrm{Ker}_- \tag{3.28}$$

が得られる。(3.28) の右辺を Dirac 作用素の指数（index）といい、$\mathrm{ind}\not{D}_A$ と書く。すると (3.18), (3.19) において $\theta(x)=1$ としたものから

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \sum_{\mu=1}^{d} \partial_\mu J^\mu_{d+1}(x) \rangle dx + 2m \int_{\mathbb{R}^d} \langle \bar{\psi}(x)\gamma_{d+1}\psi(x) \rangle dx = 2\,\mathrm{ind}\not{D}_A \tag{3.29}$$

が得られる。(3.29) は実験事実と矛盾しない。

量子化されない波動場の力学において成立していた保存則が、場の量子化に伴う量子効果によって破れる現象を量子異常（anomaly）といい、とくに上述の chiral current の保存則の破れを chiral anomaly という。場の量子論においても形式的な計算を素朴に行うとき、chiral current の保存則は一見成り立っているように見えるのだが、何らかの正則化を行って注意深く計算すると微妙な破れが存在することが分かる。以下の節では、Dirac 作用素の index の特徴と anomaly の原因について考察する。

4. Dirac 作用素の index

Dirac 作用素の index は数学的に自明でない不変性をもち、「位相不変量」であることが知られている。

境界条件と大局的構造

この問題を考えるためには、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ よりも torus

$$\mathbb{T}_0^d = (\mathbb{R}/l\mathbb{Z})^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid -l/2 < x \leq l/2\} \tag{4.1}$$

の上で考える方がよい。ただし l は正の定数である。$\mathbb{T}_0^d$ 上の spinor 場（$\mathbb{C}^{2^{d/2}}$ 値関数）$\psi(x)$ に、境界条件

$$\psi(x + le_\mu) = e^{i\chi_\mu(x)}\psi(x)\,, \quad \mu = 1, 2, \cdots, d \tag{4.2}$$

を課す[9]。ただし $\chi_\mu(x)$ は境界（付近）で定義された適当に滑らかな関数で、e_μ は x^μ 軸方向の単位ベクトルである。

たとえば、torus の境界点 $(0, x^2, \cdots, x^d)$ と $(l, x^2, \cdots, x^d)$ は同一の点と見なされるが、(4.2) のもとで $\psi(x)$ は

$$\psi(l, x^2, \cdots, x^d) = e^{i\chi_1(0,x^2,\cdots,x^d)}\psi(0, x^2, \cdots, x^d) \tag{4.3}$$

を満たすので、境界を越えて torus の右端（$x^1 = l$）から左端（$x^1 = 0$）に飛ぶとき、関数値は $e^{i\chi_1}$ をかけて位相因子をずらしてつながなければならない。言

9　Dirac 作用素は 1 階微分作用素であるから、(4.2) のほかに $\psi(x)$ の微分係数に対する境界条件も必要である。

い換えれば、境界の右端付近で gauge 変換

$$\psi'(x) = e^{i\chi_1(x)}\psi(x)\,, \quad \mu = 1, 2, \cdots, d \tag{4.4}$$

を施すことにより、右端での $\psi'(x)$ が左端での $\psi(x)$ になめらかにつながっていなければならない。このとき当然のこととして potential$A_\mu(x)$ も境界の右端付近で gauge 変換

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi_1(x) \tag{4.5}$$

を受けるが、右端での $A'_\mu(x)$ と左端での $A_\mu(x)$ がなめらかにつながっていなければならない。これが potential$A_\mu(x)$ に対する境界条件である。

このように、Dirac 作用素を定義するには、spinor 場の境界条件を定める必要があり、その結果電磁 potential の境界条件が定まる。これらの境界条件は、torus の境界を貼り合わせるとき、spinor 場や potential の貼り合わせ方を規定している。境界条件を換えると貼り合わせ方が変わるが、連続的に貼り合わせ方を変えたときに互いにつながる貼り合わせ方を一つの類にまとめることにする。このとき、連続的な変形によってつながらない貼り合わせ方が存在するため、上記の類は複数生ずることになる。直観的に言うと、これらの類は、何回ねじって貼り合わせたかによって区別される。このとき Dirac 作用素の index はねじった回数に依存して定まり、貼り合わせの連続的な変形に関して不変であることが知られている。

このように torus 上で境界条件を満たす spinor 場を考えるとき、torus 上の各点に $\mathbb{C}^{2^{d/2}}$ で表される内部空間を立て、積 $\mathbb{T}_0^d \times \mathbb{C}^{2^{d/2}}$ を考えるのだが、内部空間は torus の境界において適切に（境界条件を満たすように）貼り合わせる必要がある。このようにして定まる対象 $\mathbb{T}_0^d \times \mathbb{C}^{2^{d/2}}$ を vector bundle という。すると、貼り合わせのねじり方に関する類別により、torus 上の vector bundle の大局的な構造が区別されることになる。そして、Dirac 作用素の index は vector bundle の大局的な構造の類によって定まると言える。

指数定理

Dirac 作用素の index は、電磁場の強さ

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \tag{4.6}$$

で表す事もできる。すなわち、次式が成立する。

$$\mathrm{ind}\not{D}_A = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}(d/2)!}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_d=1}^{d}\epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_d} F_{\mu_1\mu_2}(x)F_{\mu_3\mu_4}(x)\cdots F_{\mu_{d-1}\mu_d}(x)dx \tag{4.7}$$

ただし、$\epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_d}$ は完全反対称テンソルである。電磁場の強さ $F_{\mu\nu}$ は電磁場の局所的な歪みを表すので、(4.7) の右辺は歪みの総量を表し、それがねじれ回数に一致するものと解釈できる。この等式が表す事実を指数定理という[3)]。

指数定理に対応して、(3.29) を局所化した公式

$$\langle\sum_{\mu=1}^{d}\partial_\mu J^\mu_{d+1}(x)\rangle + 2m\langle\bar{\psi}(x)\gamma_{d+1}\psi(x)\rangle = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}(d/2)!}\sum_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_d=1}^{d}\epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_d} F_{\mu_1\mu_2}(x)F_{\mu_3\mu_4}(x)\cdots F_{\mu_{d-1}\mu_d}(x) \tag{4.8}$$

が成立する。(4.8) の両辺を積分すると (3.29) になるのだが、(4.8) は積分する前の被積分関数が各点ごとに一致することを主張するものであり、(3.29) を局所化したものであると言える。問題は、形式的な計算のレベルを超えて、厳密に (4.8) を導出することである。

5. 格子正則化

無限次元の Grassmann 積分を厳密に定義するために、torus(4.1) を lattice spacing a の格子

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_a^d &= a(\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^d \\ &= \{(x_1,x_2,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d \mid \exists n_j\,(\text{整数}) : x_j = an_j,\ -L/2 < n_j \le L/2\}\end{aligned} \tag{5.1}$$

で近似する (図 1)。ただし $l = aL$ とし、便宜上 L は偶数とする。格子 $\mathbb{T}_a^d$ は L^d 個の点からなる。$\mathbb{T}_a^d$ 上の平面波 e^{ipx} の momentum $p = (p_1,p_2,\cdots,p_d)$ は、

$$p_\mu = \frac{2\pi j_\mu}{aL},\ j_\mu\in\mathbb{Z},\ -L/2 < j_\mu \le L/2 \tag{5.2}$$

と表される。(5.2) を満たす p の全体を $\mathbb{T}_a^{d*}$ と書く。

格子近似から連続空間に戻るには、$aL = l$ を固定し、$a\to 0,\ L\to\infty$ なる連続極限として得られる torus (4.1) を考える。さらにユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ まで戻

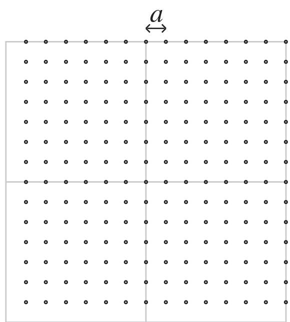

図 1： 2 次元 torus の格子化（$L=14$）。一辺の長さが La の正方形の上辺と下辺、および右辺と左辺は貼り合わされる。

るには $l\to\infty$ の極限（無限体積極限）をとる必要があるが、anomaly は局所的な問題なので、無限体積極限は重要な意味をもたない。以下において、l を任意の定数として固定し、$\mathbb{T}_a^d$ の連続極限 $\mathbb{T}_0^d$ のみ考える。

Dirac 作用素の格子化

$\mathbb{T}_a^d$ 上の spinor 値関数 u,v（$\mathbb{C}^{2^{d/2}}$ 値関数）に対し、内積を

$$(u,v)=a^d\sum_{x\in\mathbb{T}_a^d}u^*(x)v(x) \tag{5.3}$$

で定義する。$u^*(x)$ は $u(x)$ の各成分の複素共役をとり transpose したものである。点 $x+ae_\mu$ から点 x への（両者を結ぶ線分に沿う）共変的平行移動 $T_\mu u$ を定義するために、

$$U_{x,x+ae_\mu}=\exp\left(-i\int_0^a A_\mu(x+se_\mu)ds\right) \tag{5.4}$$

として、

$$(T_\mu u)(x)=U_{x,x+ae_\mu}u(x+ae_\mu) \tag{5.5}$$

と定義する。共変的平行移動を用いると、Dirac 作用素 (2.4) の格子近似を

$$\boldsymbol{D}_A=\frac{1}{2a}\sum_{\mu=1}^{d}\gamma^\mu(T_\mu-T_\mu^{-1}) \tag{5.6}$$

によって定義することができる。上記の内積 (5.3) の意味での T_μ の adjoint を T_μ^* とすると

$$T_\mu^{-1} = T_\mu^* \tag{5.7}$$

となるので、格子 Dirac 作用素 $\boldsymbol{D}_A$ は anti-hermite であり、

$$\boldsymbol{D}_A^* = -\boldsymbol{D}_A \tag{5.8}$$

かつ chiral 不変性

$$\boldsymbol{D}_A \gamma_{d+1} + \gamma_{d+1} \boldsymbol{D}_A = 0 \tag{5.9}$$

が成立する。

格子 Dirac 作用素の不合理

ところが、このようにして格子化された Dirac 作用素は、重要な性質を欠いている。$\boldsymbol{D}_A$ と γ_{d+1} は $\mathbb{T}_a^d$ 上の spinor に作用する有限次元行列であるから、$\mathrm{Tr}\,\gamma_{d+1}$ は自明に 0 となり、(3.28) と同様に

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}\boldsymbol{D}_A &= \dim \mathrm{Ker}_+ - \dim \mathrm{Ker}_- \\ &= \mathrm{Tr}\,\gamma_{d+1} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

となる。すなわち、$\boldsymbol{D}_A$ は（0 でない index をもつ）Dirac 作用素 $\not{D}_A$ を近似していないし、$\boldsymbol{D}_A$ は量子異常をもたない。

これは、(5.6) によって Dirac 作用素を格子化したとき、対称差分を構成したため、$\boldsymbol{D}_A$ が病的な固有関数をもつからである。そのような固有関数の例を与えるために、電磁 potential$A_\mu(x)$ が 0 のときの格子 Dirac 作用素 $\boldsymbol{D}_0$ を考える。このとき $U_{x,x+ae_\mu} = 1$ となるので、平面波 e^{ipx}, $p \in \mathbb{T}_a^{d*}$, の差分は

$$\frac{1}{2a}(T_\mu - T_\mu^{-1})e^{ipx} = \frac{i}{a}\sin(ap_\mu)e^{ipx} \tag{5.11}$$

となる。そこで $\boldsymbol{D}_0$ の平面波への作用を

$$\boldsymbol{D}_0 e^{ipx} = \boldsymbol{D}_0(p) e^{ipx} \tag{5.12}$$

と書くと、

$$\boldsymbol{D}_0(p) = \sum_{\mu=1}^{d} \gamma^\mu \frac{i}{a} \sin(ap_\mu) \tag{5.13}$$

したがって、各 p_μ が 0 または π/a に近いとき

$$\boldsymbol{D}_0(p) \approx i \sum_{\mu=1}^{d} \gamma^\mu \tilde{p}_\mu \tag{5.14}$$

ただし

$$\tilde{p}_\mu = \begin{cases} p_\mu, & p_\mu \approx 0 \\ \pi/a - p_\mu, & p_\mu \approx \pi/a \end{cases} \tag{5.15}$$

である。特に

$$\boldsymbol{D}_0(p) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p_\mu = 0,\ \pi/a \tag{5.16}$$

となる。したがって、constant spinor $\xi(\neq 0)$ を波動化した configuration

$$u_p(x) = e^{ipx}\xi\,, \quad p \in \mathbb{T}_a^{d\,*} \tag{5.17}$$

に対し

$$\boldsymbol{D}_0 u_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p_\mu = 0, \pi/a \tag{5.18}$$

が成り立つ。特に、ある μ に対して $p_\mu = \pi/a$ となる configuration u_p は $\boldsymbol{D}_0$ の kernel に属するが、連続極限において $\mathbb{T}_0^d$ 上の spinor 値関数に収束しない。一般に、$\boldsymbol{D}_0$ の $\mathcal{O}(a^0)$ の固有値に属する固有ベクトルでありながら、$\mathcal{O}(a^{-1})$ の momentum をもつため、連続 Dirac 作用素の固有関数につながらない configuration を doubler と呼ぶ。これに対し、$a \to 0$ の極限で $\mathbb{T}_0^d$ 上の固有関数につながる格子固有関数を normal mode ということにする。

Potential $A_\mu(x)$ が 0 でないときも doubler が存在するなら、格子 Dirac 作用素の kernel の中の doubler のために、本来 0 でないはずの index が格子上で 0 になってしまうし、doubler が chiral current の一部を担いながら連続極限において視界から消えるために、chiral current の保存則が破れると考えられる。

6. Wilson fermion

問題は、格子 Dirac 作用素に含まれる対称的差分作用素が normal mode と doubler を区別できないことである。そこで 2 階の差分作用素、すなわち差分 Laplacian（の -1 倍）

$$W = -\frac{1}{a^2}\sum_{\mu=1}^{d}(T_\mu + T_\mu^{-1} - 2) \tag{6.1}$$

を考え、

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{W}} = \boldsymbol{D}_A + \frac{1}{2}arW \tag{6.2}$$

とおく。r は正の定数である[10]。

平面波への作用

$A_\mu = 0$ のとき、

$$We^{ipx} = \frac{2}{a^2}\sum_{\mu=1}^{d}(1-\cos(ap_\mu))e^{ipx} \tag{6.3}$$

であるから、

$$We^{ipx} = \begin{cases} \mathcal{O}(1) & \text{normal mode} \\ \mathcal{O}(a^{-2}) & \text{doubler} \end{cases} \tag{6.4}$$

となり、doubler を識別している。$\boldsymbol{D}_{\mathrm{W}}$ の平面波への作用を

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{W}}e^{ipx} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{W}}(p)e^{ipx} \tag{6.5}$$

と書くと

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{W}}(p) = \sum_{\mu=1}^{d}\gamma^\mu \frac{i}{a}\sin(ap_\mu) + \frac{r}{a}\sum_{\mu=1}^{d}(1-\cos(ap_\mu)) \tag{6.6}$$

したがって、各 p_μ が 0 または π/a に近いとき

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{W}}(p) \approx i\sum_{\mu=1}^{d}\gamma^\mu \tilde{p}_\mu + \frac{2r}{a}n \tag{6.7}$$

---

10 ある理由により $0 < r \leq 1$ の範囲に限定する。

となる。ただし n は p_μ が π/a に近いような μ の数である。すなわち、doubler は $\mathcal{O}(a^{-1})$ という大きい mass をもつように見える。よって $p \in \mathbb{T}_a^{d*}$ に対し

$$\boldsymbol{D}_\mathrm{W}(p) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p = 0 \tag{6.8}$$

が成り立ち、$\boldsymbol{D}_\mathrm{W}$ の kernel は doubler を含まないことが分かる。

Wilson fermion

格子 Dirac 作用素として $\boldsymbol{D}_\mathrm{W}$ を用いることにして、(2.1)、(3.1)、(3.2)、(3.3) を次のように格子化する。

$$\mathcal{A}_\mathrm{W} = a^d \sum_{x \in \mathbb{T}_a^d} \bar{\psi}(x)(\boldsymbol{D}_\mathrm{W} + m)\psi(x) \tag{6.9}$$

$$\langle F(\bar{\psi}, \psi)\rangle = \frac{1}{Z}\int F(\bar{\psi}, \psi)\exp(\mathcal{A}_\mathrm{W})d\bar{\psi}d\psi \tag{6.10}$$

$$d\bar{\psi}d\psi = \prod_{x \in \mathbb{T}_a^d} d\bar{\psi}(x) \prod_{x \in \mathbb{T}_a^d} d\psi(x) \tag{6.11}$$

$$Z = \int \exp(\mathcal{A}_\mathrm{W})d\bar{\psi}d\psi = \mathrm{Det}(\boldsymbol{D}_\mathrm{W} + m) \tag{6.12}$$

Doubler は実質的に $\mathcal{O}(a^{-1})$ 程度の mass をもつであろうから、状態和 (6.10) への doubler の寄与が抑制されることを期待する。このように定式化された fermion の理論を Wilson fermion という。Wilson fermion における chiral anomaly についてさまざまな結果が知られているが、数学的厳密性を追求しているものは極めて少ない。Torus 上での厳密な解析は文献[4)]でなされたが、一般の（spin）多様体上での厳密な解析（物理的には重力場が関与する問題）は完全には解決していない。この問題の難しさは、doubler を抑制する項 W の働きが弱いことに起因する。

7. Ginsparg-Wilson 関係式

格子 Dirac 作用素 $\boldsymbol{D}_\mathrm{W}$ の 1 つの難点は、chiral 不変性をもたないことである。即ち、連続 Dirac 作用素は chiral 不変性 (3.7) をもつが、$\boldsymbol{D}_\mathrm{W}$ は

$$\gamma_{d+1}\boldsymbol{D}_\mathrm{W} + \boldsymbol{D}_\mathrm{W}\gamma_{d+1} = ar\gamma_{d+1}W \tag{7.1}$$

のように、右辺に chiral 不変性の破れが現れる。しかし normal mode に限定すれば、この chiral 不変性の破れは $\mathcal{O}(a)$ であり、連続極限 $a \to 0$ において見え

なくなるだろうという期待する。(7.1) のように chiral 対称性が破れることは、格子化（粗視化）に伴う必然的な結果であると考えられている[5)]。しかし chiral 対称性をもつ連続理論を粗視化して得られる実効理論を考えてみると、粗視化に伴って文字通りの chiral 対称性は破れるものの、連続理論が有する chiral 対称性は何らかの形で実効理論に遺伝しているはずである。このような観点から、Wilson と Ginsparg は連続 Dirac 作用素にある種の粗視化を施したときの chiral 対称性の破れを考察し、次のような関係式を得た[6)]。

$$\gamma_{d+1}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}\gamma_{d+1} = a\boldsymbol{D}R\gamma_{d+1}\boldsymbol{D} \tag{7.2}$$

R は定数とする。これを Ginsparg-Wilson 関係式といい、この関係式を満たす格子作用素は、何らかの意味で chiral 対称性をもつと考えられる。

Neuberger の作用素

Ginsparg-Wilson 関係式を満たす格子作用素の例は、Neuberger によって見出された[7)]。まず Wilson による格子 Dirac 作用素（$r = 1$ とする）

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{W}} = \boldsymbol{D}_{A} + \frac{1}{2}aW \tag{7.3}$$

を用いて

$$A = -a\boldsymbol{D}_{\mathrm{W}} + M \tag{7.4}$$

とおく。M は 0 でない実数とする。Potential $A_\mu(x)$ が十分なめらかなら A^{-1} が存在することが分かり、したがって

$$B = (A^*A)^{-1/2} \tag{7.5}$$

が定義される。この作用素 B の行列要素は隣接点を越えて広がるが、2 点の距離に関して急速に減衰し、0 でない行列要素の広がりは $\mathcal{O}(a)$ 程度の範囲であるとしてよい。これらの作用素を用いて

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{N}} = \frac{1}{a}(1 - AB) \tag{7.6}$$

とおくと、$R = 1$ の Ginsparg-Wilson 関係式

$$\gamma_{d+1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{D}_{\mathrm{N}}\gamma_{d+1} = a\boldsymbol{D}_{\mathrm{N}}\gamma_{d+1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{N}} \tag{7.7}$$

および hermiticity property

$$\gamma_{d+1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{N}}\gamma_{d+1} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{N}}^{*} \tag{7.8}$$

が成り立つ。また $\boldsymbol{D}_{\mathrm{N}}$ の 0 でない行列要素の広がりは $\mathcal{O}(a)$ 程度の範囲であると考えてよいので、$\boldsymbol{D}_{\mathrm{N}}$ は局所的な作用素であり、微分作用素の格子近似と見なせるだろう。

平面波への作用

作用素 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{N}}$ が Dirac 作用素 (2.4) を近似していることを見るために、potential $A_\mu(x)$ が 0 であるとして、$\boldsymbol{D}_{\mathrm{N}}$ の平面波への作用を調べる。(5.12)、(5.15)、(6.5) と類似の記法を用いると、各 p_μ が 0 または π/a に近いとき

$$A(p) \approx M - 2n - ia\sum_{\mu=1}^{d}\gamma^\mu \tilde{p}_\mu \tag{7.9}$$

$$(A^*A)(p) \approx (M-2n)^2 \tag{7.10}$$

ただし n は p_μ が π/a に近いような μ の数である。よって

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{N}}(p) \approx \frac{i}{|M-2n|}\sum_{\mu=1}^{d}\gamma^\mu\tilde{p}_\mu + \begin{cases} 0, & M > 2n \\ 2/a, & M < 2n \end{cases} \tag{7.11}$$

特に $M=1$ にとれば

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{N}}(p) \approx \begin{cases} i\displaystyle\sum_{\mu=1}^{d}\gamma^\mu p_\mu, & n = 0 \text{ (normal)} \\ \dfrac{i}{|1-2n|}\sum_{\mu=1}^{d}\gamma^\mu p_\mu + \dfrac{2}{a}, & n > 0 \text{ (doubler)} \end{cases} \tag{7.12}$$

となり、normal mode に対しては連続 Dirac 作用素の近似になっており、他方 doubler は大きい mass をもつ形になっていることが分かる。

8. 格子作用素の spectrum

R を定数として、Ginsparg-Wilson 関係式

$$\gamma_{d+1}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}\gamma_{d+1} = a\boldsymbol{D}R\gamma_{d+1}\boldsymbol{D} \tag{8.1}$$

および hermiticity property

$$\gamma_{d+1}\boldsymbol{D}\gamma_{d+1} = \boldsymbol{D}^{*} \tag{8.2}$$

を満たす格子作用素 $\boldsymbol{D}$ が $\mathbb{T}_a^d$ 上で定義されているとする。仮定 (8.1) と (8.2) のもとで、格子作用素 $\boldsymbol{D}$ の chiral な性質を調べることができる。それを以下に見てみよう。

Doubler の分離

まず

$$\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^* = \frac{1}{aR}(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}^*) \tag{8.3}$$

が成り立つので、$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}^*$ は同時対角化可能であり、$\boldsymbol{D}$ の異なる固有値に属する固有空間は互いに直交する。そして $\boldsymbol{D}$ の固有値 λ は

$$|\lambda|^2 = \frac{1}{aR}(\lambda + \bar{\lambda}) \tag{8.4}$$

を満たす。これは $1/(aR)$ を中心とする半径 $1/(aR)$ の複素平面上の円である。すなわち、0 に近い固有値はほとんど純虚数であり、連続 Dirac 作用素の振る舞いを近似していることが示唆される。また大変大きい実数 $2/(aR)$ の近くにも固有値が存在し得るが、これは doubler の固有値を意味していると考えられる。

$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{D}^*$ は同時対角化可能であるから、共通の固有ベクトルをもつ。

$$\boldsymbol{D}u = \lambda u \tag{8.5}$$

$$\boldsymbol{D}^*u = \bar{\lambda}u \tag{8.6}$$

このとき

$$\boldsymbol{D}\gamma_{d+1}u = \bar{\lambda}\gamma_{d+1}u \tag{8.7}$$

も成り立つ。したがって、0、$2/(aR)$ 以外の固有値 λ（実数ではない）を考えると、固有ベクトル u は $\gamma_{d+1}u$ と直交する。また

$$\boldsymbol{D}_\pm = \frac{1}{2}(\boldsymbol{D} \pm \boldsymbol{D}^*) \tag{8.8}$$

とおくと、上記の固有ベクトル u に対し、

$$\boldsymbol{D}_-u = i(\mathrm{Im}\lambda)u \tag{8.9}$$

$$\boldsymbol{D}_+u = (\mathrm{Re}\lambda)u \tag{8.10}$$

が成り立つ。さらに

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_- + \boldsymbol{D}_+ \tag{8.11}$$

という分解において、$\boldsymbol{D}_-$ が anti-hermite で $\boldsymbol{D}_+$ が hermite であることを考え合わせると、この分解は (6.2) に対応するものであることが分かる。

$\boldsymbol{D}$ の固有値 0、$2/(aR)$ に属する固有空間（normal mode, doubler）への直交射影を、それぞれ $\Pi_0,\ \Pi_1$ とする。ただし、これらの固有空間が存在しなければ、射影は 0 とする。すると γ_{d+1} は $\Pi_0,\ \Pi_1$ の像に作用しており、

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_{d+1}\Pi_0\right) + \mathrm{Tr}\left(\gamma_{d+1}\Pi_1\right) = 0 \tag{8.12}$$

が成り立ち、doubler を分離せずに γ_{d+1} の trace を見ると 0 になることが分かる。しかし normal mode に限定した trace である $\mathrm{Tr}\left(\gamma_{d+1}\Pi_0\right)$ は 0 になるとは限らない。

9. Anomaly

格子 Dirac 作用素として (8.1) と (8.2) を満たす $\boldsymbol{D}$ を用いることにして、次のような格子理論を考える。

$$\mathcal{A}_{\mathrm{GW}} = a^d \sum_{x\in\mathbb{T}_a^d} \bar{\psi}(x)(\boldsymbol{D}_{\mathrm{W}} + m)\psi(x) \tag{9.1}$$

$$\langle F(\bar{\psi},\psi)\rangle = \frac{1}{Z}\int F(\bar{\psi},\psi)\exp(\mathcal{A}_{\mathrm{GW}})d\bar{\psi}d\psi \tag{9.2}$$

$$d\bar{\psi}d\psi = \prod_{x\in\mathbb{T}_a^d} d\bar{\psi}(x) \prod_{x\in\mathbb{T}_a^d} d\psi(x) \tag{9.3}$$

$$Z = \int \exp(\mathcal{A}_{\mathrm{GW}})d\bar{\psi}d\psi = \mathrm{Det}(\boldsymbol{D} + m) \tag{9.4}$$

Chiral 変換

$\theta = \theta(x)$ として、(3.5), (3.6) と同形の変換

$$\psi(x) = \exp(i\theta\gamma_{d+1})\psi'(x) \tag{9.5}$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}'(x)\exp(i\theta\gamma_{d+1}) \tag{9.6}$$

を考え、(3.10) と同様に θ の 1 次の項まで取ると、

$$\mathcal{A}_{\mathrm{GW}} = \mathcal{A}'_{\mathrm{GW}} + \delta\mathcal{A}'_{\mathrm{GW}} \tag{9.7}$$

ただし

$$\mathcal{A}'_{\mathrm{GW}} = \mathcal{A}_{\mathrm{GW}}(\bar{\psi}', \psi') \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}'{}_{\mathrm{GW}} = ia^d \sum_{x\in\mathbb{T}_a^d} \bar{\psi}'(x)(\theta\gamma_{d+1}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}\theta\gamma_{d+1})\psi'(x) \\ +\ 2ima^d \sum_{x\in\mathbb{T}_a^d} \theta\bar{\psi}'(x)\gamma_{d+1}\psi'(x) \end{aligned} \tag{9.9}$$

そして (3.18) の同様に

$$\langle\delta\mathcal{A}_{\mathrm{GW}}\rangle = 2i\mathrm{Tr}\,(\theta\gamma_{d+1}) \tag{9.10}$$

が得られる。ただし

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_{\mathrm{GW}} = ia^d \sum_{x\in\mathbb{T}_a^d} \bar{\psi}(x)\{\theta\gamma_{d+1}, \boldsymbol{D}\}\psi(x) \\ +\ 2ima^d \sum_{x\in\mathbb{T}_a^d} \theta\bar{\psi}(x)\gamma_{d+1}\psi(x) \end{aligned} \tag{9.11}$$

である[11]。ところが今は格子化しているので、(9.10) の右辺に無限自由度の曖昧さがなく 0 となり、

$$\langle\delta\mathcal{A}_{\mathrm{GW}}\rangle = 0 \tag{9.12}$$

すなわち

$$a^d \sum_{x\in\mathbb{T}_a^d} \langle\bar{\psi}(x)\{\theta\gamma_{d+1}, \boldsymbol{D}\}\psi(x)\rangle + 2ma^d \sum_{x\in\mathbb{T}_a^d} \theta\langle\bar{\psi}(x)\gamma_{d+1}\psi(x)\rangle = 0 \tag{9.13}$$

が得られる。

Chiral current

(9.13) に基づいて、chiral current の保存則について考察する[8)]。

(8.9), (8.10) で定義された作用素を用いると、

$$\{\theta\gamma_{d+1}, \boldsymbol{D}\} = -\gamma_{d+1}[\boldsymbol{D}_-, \theta] + \{\theta, \boldsymbol{D}_+\}\gamma_{d+1} \tag{9.14}$$

---

11 $\{X, Y\} = XY + YX$

のように書けるので、(9.13) は

$$
\begin{aligned}
&- \ a^d \sum_{x \in \mathbb{T}_a^d} \langle \bar{\psi}(x) \gamma_{d+1} [\boldsymbol{D}_-, \theta] \psi(x) \rangle + 2ma^d \sum_{x \in \mathbb{T}_a^d} \theta \langle \bar{\psi}(x) \gamma_{d+1} \psi(x) \rangle \\
&= -a^d \sum_{x \in \mathbb{T}_a^d} \langle \bar{\psi}(x) \{\theta, \boldsymbol{D}_+\} \gamma_{d+1} \psi(x) \rangle
\end{aligned}
\tag{9.15}
$$

となる、ここで交換子

$$
[\boldsymbol{D}_-, \theta] = \boldsymbol{D}_- \theta - \theta \boldsymbol{D}_- \tag{9.16}
$$

は $\boldsymbol{D}_-$ に含まれる微分が θ にかかって θ の導関数を生じさせると考え、(3.9) で行った部分積分と同様に、θ にかかった微分を部分積分により移動したとする。このとき (9.15) の左辺は、(3.4) の左辺に θ を掛けて積分したものの格子近似と見なせる。すると、(9.15) の右辺が chiral current の保存則の破れ、すなわち anomaly を与えることになる。

とくに $\theta = 1$ のとき、(9.15) の右辺を計算することができて、

$$
- a^d \sum_{x \in \mathbb{T}_a^d} \langle \bar{\psi}(x) 2\boldsymbol{D}_+ \gamma_{d+1} \psi(x) \rangle = \frac{2}{1 + \frac{1}{2} maR} \mathrm{Tr}\left(\gamma_{d+1} \Pi_0\right) \tag{9.17}
$$

となる。この右辺は連続極限 $a \to 0$ において、連続 Dirac 作用素 $\not{D}_A$ の index に収束し、(3.29) が成り立つことが期待される。さらに、一般の θ に対して (9.15) の右辺を計算する試みもあり、数学的な厳密性は保証されていないものの、(4.8) が $d = 4$ 次元で成立することを示唆する結果が知られている[12]。

付言

格子正則化に基づく chiral anomaly の計算は様々な方法で試みられてきたが、数学的厳密性を追求したものは極めて少ない。確かに Ginsparg-Wilson 関係式を満たす格子作用素の場合、chiral な性質は見通しがよい。しかし Ginsparg-Wilson 関係式 に立脚して chiral anomaly を導出することは、Wilson fermion を用いる

12 通常 (9.15) の左辺において、第 1 項が本質的であり第 2 項は mass の補正に過ぎないとされているのだが、実際には anomaly は第 2 項から出ているようにも見える。すなわち、chiral current の保存則が量子的に破れるという chiral anomaly の解釈は改められるべきかも知れない。

方法よりもさらに困難であり、現在に至るまで厳密な結果は得られていない。とくに（torus とは限らない）一般の spin 多様体上では、より高度な幾何学的量が関与することもあって手つかずの状態にある。アノマリーに限らず、場の量子論に健全な数学的基礎を与えるには、まだまだ地道な作業を積み重ねる必要がある。

参考文献

1） K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42**, 1195（1979）.
2） S. Adler, Phys. Rev. **184**, 1848（1969）.
3） A. Atiyah, R. Bott, V. Patodi, Invent. Math. **19**, 279（1973）.
4） T. Hattori, H. Watanabe, J. Math. Phys. **39**, 4449（1998）.
5） H. B. Nielsen, M. Ninomiya, Nucl. Phys. **B185**, 20（1981）.
6） P. H. Ginsparg, K. G. Wilson, Phys. Rev. **D25**, 2649（1982）.
7） H. Neuberger, Phys. Lett. **B427**, 353（1998）.
8） P. Hasenfratz, V. Laliena, F. Niedermayer, Phys. Lett. **B427**. 125（1998）.

（受付日　平成 24 年 3 月 15 日）
（受理日　平成 24 年 3 月 30 日）